

## Зміст

Вступ .....	3
Глава 1. Вступ до математичного аналізу. Границі та неперервність функції однієї змінної .....	5
§1. Множини .....	5
1.1. Логічні символи .....	5
1.2. Множини. Основні поняття .....	5
1.3. Числові множини. Множина дійсних чисел .....	6
1.4. Числові проміжки. Окіл точки .....	7
§2. Функції .....	8
2.1. Поняття функції. Графік функції. Способи завдання функцій ...	8
2.2. Основні властивості функцій .....	9
2.3. Обернена функція .....	10
2.4. Складна функція .....	11
2.5. Основні елементарні функції та їхні графіки .....	11
§3. Послідовності .....	17
3.1. Числова послідовність .....	17
3.2. Границя числової послідовності .....	19
3.3. Граничний перехід у нерівностях .....	21
3.4. Границя монотонної обмеженої послідовності. Число $e$ .....	22
§4. Границя функції .....	24
4.1. Границя функції у точці .....	24
4.2. Однобічні границі .....	26
4.3. Границя функції при $x \rightarrow \infty$ .....	27
4.4. Нескінченно велика функція (н.в.ф) .....	27
§5. Нескінченно малі функції .....	29
5.1. Визначення .....	29
5.2. Основні теореми про властивості нескінченно малих .....	29
5.3. Основні властивості границь функцій .....	32
5.4. Перша особлива границя .....	36
5.5. Друга особлива границя .....	38
§6. Еквівалентні нескінченно малі функції .....	40
6.1. Порівняння нескінченно малих функцій .....	40
6.2. Основні теореми про нескінченно малі .....	41

§7. Неперервність функцій .....	44
7.1. Неперервність функції в точці .....	44
7.2. Класифікація точок розриву .....	46
7.3. Неперервність функції на інтервалі та на відрізку .....	49
7.4. Основні теореми про неперервні функції. Неперервність елементарних функцій .....	49
7.5. Властивості функцій, що є неперервними на відрізку .....	50
Приклад розв'язання варіанта 31 з контрольних завдань до розділу 1...	51
Варіанти обов'язкового домашнього завдання .....	58
Глава 2. Диференціальне числення функції однієї змінної .....	75
§1. Похідна функції .....	75
1.1. Похідна. Диференціювання явно заданих функцій .....	75
1.2. Правила диференціювання функцій .....	78
1.3. Похідна складної функції .....	80
1.4. Похідна оберненої функції .....	81
§2. Логарифмічне диференціювання. Диференціювання функцій, заданих неявно та параметрично .....	85
2.1. Логарифмічне диференціювання .....	85
2.2. Диференціювання функцій, заданих неявно або параметрично .....	87
§3. Похідні вищих порядків .....	89
§4. Геометричний та механічний зміст похідної .....	91
§5. Диференціал .....	94
5.1. Диференціал. Основні формули .....	94
5.2. Геометричний зміст диференціала .....	96
5.3. Диференціали вищих порядків .....	98
§6. Дослідження функцій за допомогою похідних .....	99
6.1. Дослідження функцій за допомогою похідних .....	99
6.2. Правила Лопітала. Розкриття невизначеностей різних видів .....	103
6.3. Зростання та спадання функцій. Екстремуми .....	108
6.4. Найбільше та найменше значення функції .....	112
6.5. Умови опуклості й угнутості функції .....	115
6.6. Асимптоти .....	117

6.7. Загальна схема дослідження функції та побудова графіка.....	119
§7. Формула Тейлора .....	122
7.1. Формула Тейлора .....	122
7.2. Формула Тейлора для довільної функції .....	123
Приклад розв'язання контрольного завдання до розділу 2 .....	125
Варіанти обов'язкового домашнього завдання .....	140
Зразки варіантів контрольних робіт з теми «Теорія границь» .....	179
Зразки варіантів контрольних робіт з теми «Диференціювання функції однієї змінної» .....	182
Зразки варіантів контрольних робіт з теми «Дослідження функцій за допомогою похідних» .....	185
Варіанти тестових завдань до глави 1 «Границі та неперервність функції однієї змінної» .....	188
Варіанти тестових завдань до глави 2 «Диференціальне числення функції однієї змінної» .....	195
Питання до іспиту з вищої математики .....	202
ДОДАТКИ .....	205
Додаток 1. Основні формули елементарної математики .....	205
Додаток 2. Основні формули вступу до математичного аналізу та теорії границь .....	215
Додаток 3. Основні формули до глави «диференціальне числення функції однієї змінної» .....	220
Список літератури .....	228

## **Вступ**

Наданий навчальний посібник відповідає програмі курсу вищої математики, що викладається для студентів технічних спеціальностей Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Призначено посібник для аудиторної і самостійної роботи студентів очної, заочної та дистанційної форм навчання.

Посібник є другою частиною збірника під назвою «Стислий курс вищої математики», орієнтованого, в першу чергу, на такі підрозділи університету, як навчально-науковий інженерно-фізичний інститут, навчально-науковий інститут механічної інженерії та транспорту, а також технічні спеціальності військового інституту танкових військ. Наданий посібник включає навчальний матеріал першого семестру з математичного аналізу та складається з тем: вступ до математичного аналізу, теорія границь, диференціальне числення функції однієї змінної та його застосування. Кожна глава посібника містить теоретичний матеріал одної з тем, в якому наведені означення та їх пояснення, формулювання і доведення теорем, достатня кількість наочних прикладів. До кожної теми додається по тридцять варіантів індивідуальних домашніх завдань та зразок виконання одного варіанта з докладними поясненнями, кожен варіант містить достатню для засвоєння теми кількість задач. До тем надано перелік теоретичних питань, що виносяться на колоквиум та іспит, по чотири варіанти контрольних робіт з двома рівнями складності завдань та набори з 15 варіантів тестових завдань для проведення модульного контролю і поточної перевірки знань. Тестові завдання складаються з базових теоретичних та практичних питань на рівні знання формул, означень і формулювання теорем, не потребують доведень та багатокрокового виконання практичних завдань і можуть бути застосовані як допуск до іспиту або відповіді на задовільну оцінку. Наприкінці по-

сібника наведено стислий довідник основних формул з розглянутих тем. Також довідник містить формули елементарної математики, які використовуються при виконанні завдань.

Такий довідник дозволить студентам сконцентрувати увагу на головних моментах наданого матеріалу та допоможе його систематизувати.

Завдяки вищезазначеному структурному наповненню матеріалами посібник може бути використаний як викладачами, так і студентами для підготовки до контрольних робіт, колоквиумів, іспитів, при виконанні обов'язкових та домашніх завдань. Також посібник надає можливість студентам самостійно перевіряти рівень своїх знань з кожної теми.

Посібник був написаний на основі багаторічного досвіду викладання курсу вищої математики на кафедрі «Прикладна математика» НТУ ХПІ під керівництвом д.т.н., професора Л.В. Курпи, якій автори висловлюють подяку за цінні зауваження і поради.

# Глава 1. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ГРАНИЦІ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

## §1. МНОЖИНИ

### 1.1. Логічні символи

При викладанні курсу математичного аналізу для скорочення записів використовують деякі логічні символи (квантори)

№	квантор	Як читається	Приклад використання
1	$\Rightarrow$	впливає	$a > b \Rightarrow a^3 > b^3$
2	$\Leftrightarrow$	рівносильно, необхідно та достатньо	$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0, b = 0$
3	$\in$	належить	$3 \in N$ або $-2 \in Z$
4	$\notin$	не належить	$0,5 \notin N$
5	$\exists$	існує	$\exists x: x^2 - 1 = 0$ (це $x = \pm 1$ )
6	$\exists!$	існує і притому єдине значення	$\exists! x \in R: 2^x = 1$ (дійсно, це $x = 0$ )
7	$\forall$	для всіх, для кожного	$\forall x \in R \rightarrow x^2 + x + 1 > 0$

### 1.2. Множини. Основні поняття

**Множиною** називають сукупність деяких об'єктів, що об'єднані за будь-якою ознакою. Наприклад, множина дійсних чисел, множина студентів першого курсу, множина коренів рівняння.

Об'єкти, з яких складається множина, називають його елементами. Множини позначають великими літерами латинського алфавіту  $A, B, \dots, X, Y, \dots$ , а елементи множин – відповідними маленькими літерами  $a, b, \dots, x, y, \dots$

Якщо елемент  $a$  належить множині  $A$ , то пишуть  $a \in A$ , якщо елемент  $a$  не належить множині  $A$ , то пишуть  $a \notin A$  або  $a \bar{\in} A$ . Множина, що не містить жодного елемента, називається порожньою та позначається  $\emptyset$ .

Щоб задати множину, її елементи записують у фігурних дужках, в

середині яких вони перелічені (якщо це можливо), або вказують спільну ознаку, яку мають всі елементи даної множини.

Наприклад, запис  $A = \{3, 7, 11\}$  означає, що множина  $A$  складається з трьох чисел – 3, 7 та 11; запис  $X = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2\}$  означає, що множина  $X$  складається з усіх дійсних чисел, що задовольняють умові:  $-2 \leq x \leq 2$ .

Множина  $A$  називається **підмножиною** множини  $B$ , якщо кожний елемент множини  $A$  є елементом множини  $B$ . Позначається це так:  $A \subset B$  («множина  $A$  є частиною множини  $B$ ») або  $B \supset A$  («множина  $B$  вміщує в себе множину  $A$ »).

Множини, що складаються з однакових елементів, називаються рівними. Записують це так:  $A = B$ , тобто  $A \subset B$  та  $B \supset A$ .

**Об'єднанням(сумою) множин**  $A$  та  $B$  називають множину  $C$ , що складається з елементів  $x$ , кожний з яких належить або множині  $A$ , або множині  $B$ , або обом множинам одночасно. Позначається це так:  $C = A \cup B$ . Тобто  $C = A \cup B = \{x : x \in A \text{ або } x \in B\}$ .

**Перетином множин**  $A$  та  $B$  називають множину  $C$ , що складається з елементів  $x$ , кожний з яких належить множині  $A$  та множині  $B$  одночасно. Позначається це так:  $C = A \cap B$ . Тобто  $C = A \cap B = \{x : x \in A \text{ та } x \in B\}$ .

Різницею множин  $A$  та  $B$  називають множину  $C$ , що складається з елементів  $x$ , які належить множині  $A$  та не належать множині  $B$ . Позначається це  $C = A \setminus B$ . Тобто  $C = A \setminus B = \{x : x \in A \text{ та } x \notin B\}$ . У випадку, коли  $B$  є підмножиною множини  $A$  ( $B \subset A$ ), то різниця  $C = A \setminus B$  зветься доповненням множини  $B$  до множини  $A$ .

### 1.3. Числові множини. Множина дійсних чисел

Множини, елементами яких є числа, називають **числовими**.

Наприклад:

$N = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$  – множина натуральних чисел;

$Z_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$  – множина цілих невід'ємних чисел;

$Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots; \pm n; \dots\}$  – множина цілих чисел;