

ЗМІСТ

Передмова	6
Основні позначення	9
Розділ 13. Теорія рядів.....	11
13.1. Числові ряди.....	13
13.1.1. Основні поняття.....	13
13.1.2. Важливі приклади рядів	15
13.1.3. Основні властивості рядів	17
13.1.4. Необхідна ознака збіжності ряду.....	18
13.2. Ряди з невід’ємними членами.....	19
13.2.1. Властивості рядів з невід’ємними членами	19
13.2.2. Інтегральна ознака Маклорена — Коші.....	19
13.3.3. Ознаки порівняння	21
13.2.4. Ознака д’Аламбера та радикальна ознака Коші	23
13.2.5. Порівняння «потужності» різних ознак збіжності.....	25
13.3. Знакозмінні ряди.....	25
13.3.1. Знакопережні ряди	25
13.3.2. Знакозмінні ряди	27
13.3.3. Властивості абсолютно й умовно збіжних рядів.....	29
13.4. Функціональні ряди.....	30
13.4.1. Функціональні ряди.....	31
13.4.2. Степеневі ряди	35
13.4.3. Властивості степеневих рядів.....	37
13.5. Тейлорові ряди	38
13.5.1. Означення ряду Тейлора	39
13.5.2. Умови розвивності функції в Тейлорів ряд	40
13.5.3. Ряди Тейлора — Маклорена елементарних функцій	41
13.5.4. Застосування степеневих рядів.....	43
13.6. Ряди Фур’є.....	45
13.6.1. Періодичні процеси.....	45
13.6.2. Тригонометричні ряди	46
13.6.3. Тригонометричні ряди Фур’є.....	48
13.6.4. Умови розвивності функції в ряд Фур’є.....	50
13.6.5. Розвинення в ряд Фур’є неперіодичної функції.....	51
13.6.6. Розвинення в ряд Фур’є функцій, графіки яких мають симетрію	52
13.6.7. Розвинення функції в ряд за косинусами чи за синусами	55
13.6.8. Особливості розвинень функцій у ряд Фур’є.....	55
13.6.9. Комплексна форма ряду Фур’є.....	57
13.6.10. Амплітудний і фазовий спектри ряду Фур’є.....	58

Запитання та завдання для самоконтролю	61
Формули, твердження, алгоритми та схеми.....	68
Практикум 13.1. Числові ряди	81
Практикум 13.2. Числові ряди з додатними членами.....	88
Практикум 13.3. Знакозмінні ряди	97
Практикум 13.4. Функціональні та степеневі ряди.....	103
Практикум 13.5. Тейлорові ряди	113
Практикум 13.6. Ряди Фур'є	123
Основні поняття та вміння.....	140
Розділ 14. Теорія функцій комплексної змінної.....	141
14.1. Функції комплексної змінної.....	143
14.1.1. Множини на комплексній площині.....	143
14.1.2. Функції комплексної змінної.....	144
14.1.3. Показникова й логарифмічна функція комплексної змінної.....	146
14.1.4. Степенева функція комплексної змінної.....	148
14.1.5. Тригонометричні функції комплексної змінної.....	149
14.1.6. Гіперболічні функції комплексної змінної.....	151
14.2. Диференціювання функцій комплексної змінної.....	151
14.2.1. Диференційовність функції комплексної змінної.....	152
14.2.2. Аналітичність функції.....	154
14.2.3. Відновлення аналітичної функції	155
14.3. Інтегрування функцій комплексної змінної	157
14.3.1. Інтеграл від функції комплексної змінної	157
14.3.2. Теорема Коші.....	160
14.3.3. Формула Ньютона — Лейбніца.....	162
14.3.4. Інтегральна формула Коші	164
14.4. Ряди з комплексними членами	165
14.4.1. Числові ряди	166
14.4.2. Степеневі ряди з комплексними членами.....	166
14.4.3. Тейлорові ряди	167
14.4.4. Лоранові ряди.....	169
14.5. Ізольовані особливі точки	171
14.5.1. Нулі аналітичної функції	171
14.5.2. Типи ізольованих особливих точок.....	172
14.6. Лишки функцій та їх застосування.....	177
14.6.1. Лишок функції в ізольованій особливій точці.....	177
14.6.2. Основна теорема про лишки	180
14.6.3. Застосування лишків до обчислення визначених і невластивих інтегралів	182
Запитання та завдання для самоконтролю	185
Формули, твердження, алгоритми та схеми.....	193
Практикум 14.1. Елементарні функції комплексної змінної.....	202
Практикум 14.2. Диференціювання функцій комплексної змінної	208
Практикум 14.3. Інтегрування функцій комплексної змінної	213

Практикум 14.4. Ряди з комплексними членами	219
Практикум 14.5. Нулі та ізольовані особливі точки функції.....	227
Практикум 14.6. Лишки функцій та їх застосування	232
Основні поняття та вміння.....	242
Розділ 15. Інтегральні перетворення функцій	243
15.1. Інтеграл і перетворення Фур'є.....	245
15.1.1. Інтеграл Фур'є	245
15.1.2. Інтегральне перетворення Фур'є.....	249
15.1.3. Косинус- і синус-перетворення Фур'є.....	250
15.2. Інтегральне перетворення Лапласа	253
15.2.1. Оригінали та їх зображення	253
15.2.2. Властивості перетворення Лапласа	257
15.2.3. Основна таблиця зображень	261
15.2.4. Теорема множення	261
15.2.5. Відшукання оригіналу за зображенням	263
15.3. Операційне числення.....	265
15.3.1. Розв'язання лінійних диференціальних рівнянь	265
15.3.2. Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь	268
15.3.3. Розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри 2-го роду	269
Запитання та завдання для самоконтролю	271
Формули, твердження, алгоритми та схеми.....	275
Практикум 15.1. Інтеграл і перетворення Фур'є.....	283
Практикум 15.2. Пряме перетворення Лапласа	290
Практикум 15.3. Обернене перетворення Лапласа.....	300
Практикум 15.4. Застосування операційного числення	305
Основні поняття та вміння.....	317
Додаток А. Походження деяких термінів та позначень	318
Список використаної та рекомендованої літератури.....	319
Предметний покажчик	321
Іменний покажчик	324

ПЕРЕДМОВА

В основу навчального комплексу «Математика в технічному університеті» покладено навчальні матеріали курсу вищої математики, які пройшли вже багаторічну серйозну апробацію викладачами та студентами Київського політехнічного інституту, а саме: конспекти лекцій та практикуми для проведення практичних занять та організації самостійної роботи студентів, матеріали дистанційних курсів.

Теоретична і практична частина комплексу відповідає навчальним програмам з вищої математики всіх технічних спеціальностей КПІ ім. Ігоря Сікорського денної та заочної форм навчання. Комплекс може бути застосований для підтримки як денної форми навчання, так і дистанційної чи змішаної.

Гармонічне поєднання теоретичної частини (власне підручника) і практичної частини (практикуму — задачника з великою кількістю розв'язаних задач) уже можна вважати традицією написання навчальних видань для майбутніх інженерів чи економістів.

Четвертий том підручника складається з 3 розділів:

- теорія рядів;
- теорія функцій комплексної змінної;
- інтегральні перетворення функцій.

Треба зазначити, що навколо порядку вивчення тем, рівня строгості викладання для нематематиків (жодним чином не применшуючи важливість ґрунтовної математичної підготовки для майбутнього інженера, економіста чи соціолога) триває безперервна дискусія. Опанування студентами математичних основ дає надію, що надалі вони зможуть поглибити свої математичні знання під вивчення спеціальних дисциплін або самостійно.

Певної незалежності порядку вивчення розділів у виданні досягнуто завдяки модульній побудові комплексу (весь матеріал розбито на порівняно невеликі розділи). Для викладу теорії свідомо вибрано *базовий* рівень, «...щоб математичний підручник для інженера не перетворився на маленьку копію університетського курсу». Поглиблювати свої знання з основного курсу математики або вивчати ті спеціальні розділи, які не ввійшли до навчального комплексу можна за виданнями вказаними у списку рекомендованої літератури.

Кожен розділ побудовано за такою схемою:

- вступ (анотація розділу, місце розділу в курсі вищої математики, перелік ключових понять, основні знання та вміння);
- основна частина (власне, виклад теоретичного матеріалу);
- запитання та завдання для самоконтролю;
- формули, твердження, алгоритми;
- практикуми;
- основні поняття та вміння.

Основу тексту підручника складають опис основних понять, формулювання означень та теорем, обговорення умов теорем, доведення основних теорем, ілюстративні приклади (змістовні приклади подано у практикумі). У тексті також уміщено велику кількість рисунків, що унаочнюють і ілюструють математичні поняття та твердження.

Нумерація означень, теорем та рисунків є наскрізною в середині розділу. Розділ розбито на теми (обсяг наближено відповідає обсягу однієї лекції).

Кожен розділ містить опорний конспект теоретичного матеріалу, доповнений схемами та алгоритмами розв'язання задач і має назву «*Формули, твердження, алгоритми*».

Вивчення теорії з кожної теми підкріплюється опануванням відповідного *практикуму*, яке полягає в розбиранні розв'язаних початкових задач і розв'язання певної кількості задач під керівництвом викладача чи самостійно. До всіх задач практикумів подано відповіді. Нумерація задач наскрізна. Обсяг кожного практикуму наближено відповідає обсягу практичного заняття.

Задачі вміщено тільки полегшеного і базових рівнів. Збірники задач та вправ, які містять складніші задачі, подано в *списку рекомендованих джерел*.

У тексті практикумів використано такі позначення:

[*X.Y.Z.*] — посилання на опорний конспект, а саме клітинку *Z*, у якій уміщено теоретичний факт або формулу, таблиці *X.Y.* з розділу *X*;

X.Y.Z. — посилання на навчальну задачу **X.Y.Z** практикуму **X.Y.**

①,②,③,... — посилання в навчальній задачі на коментар, який уміщено після її розв'язання.

Опорні конспекти та практикуми також допоможуть під час розв'язання індивідуальних домашніх завдань, підготовці до контрольних робіт та іспитів, заповненні прогалин у попередніх знаннях.

Перелік *основних понять і вмінь, запитання та завдання для самоконтролю* допоможуть у підготовці до контрольних робіт, колоквиумів та іспиту.

Вивчати теоретичний матеріал на *підвищеному* рівні (зокрема ознайомитись з відсутніми в тексті доведеннями), а також ознайомитись з мотивацією запровадження математичних понять, їх історією та застосуваннями можна за *списком рекомендованих джерел*.

Для зручності користування підручником подано *предметний та іменний покажчики*. Предметний покажчик містить посилання на підпункти теоретичної частини розділу, де запроваджено чи розглянуто поняття і номери задач відповідного практикуму. Іменний покажчик містить посилання на підпункти теоретичної частини, де згадано прізвище видатного математика і коротку біографічну довідку про нього.

У *додатку А* подано інформацію про походження деяких термінів та позначень.

Постановку курсу вищої математики в технічному університеті та розроблення відповідного навчально-методичного забезпечення доцільно орієнтувати на досягнення трьох основних цілей:

- розвиток у студентів культури мислення (особливо його логічного та алгоритмічного аспектів);
- опанування математики як універсальної мови науки, необхідної для вивчення всіх подальших дисциплін;
- перетворення математики на робочий інструмент аналізу та дослідження математичних моделей.

Потреба ефективного керування самостійною роботою студентів спонукає до подальшого розвитку і ставить задачу створення та доповнення комплексу збірниками індивідуальних домашніх завдань, контрольних робіт, тестів різних форм.

Автори висловлюють удячність рецензентам, колегам та студентам за корисні зауваження і поради, урахування яких дозволило покращити стиль викладу окремих розділів.

Зауваження та помічені огріхи та неточності можна надсилати на адреси:

alexir1@ukr.net,
a.dyx@ukr.net,
fedorova_lb@yahoo.com.ua

Автори

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ



○ та ●

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

$$e^z$$

$$\operatorname{Ln} z$$

$$\ln z$$

$$a^z$$

$$z^\alpha$$

$$\sin z, \cos z,$$

$$\operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z$$

$$\operatorname{Arcsin} z, \operatorname{Arccos} z,$$

$$\operatorname{Arctg} z, \operatorname{Arcctg} z$$

$$\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, \operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$$

$$f'(z_0)$$

$$\int_L f(z)dz$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

— завершення доведення

— початок і завершення розв'язання прикладу

— числовий ряд з дійсними членами 13.1.1

— функціональний ряд 13.4.1

— визначений інтеграл зі змінною верхньою межею 9.7.1

— границя функції комплексної змінної f у точці z_0 14.1.2

— показникова функція комплексної змінної z 14.1.3

— логарифмічна функція комплексної змінної z 14.1.3

— головне значення логарифмічної функції змінної z 14.1.3

— загальна показникова функція комплексної змінної z 14.1.3

— загальна степенева функція комплексної змінної z 14.1.4

— тригонометричні функції комплексної змінної z 14.1.5

— обернені тригонометричні функції комплексної змінної z 14.1.5

— гіперболічні функції комплексної змінної z 14.1.5

— похідна функції комплексної змінної f у точці z_0 14.2.1

— інтеграл уздовж кривої L від функції комплексної змінної f 14.3.1

— числовий ряд з комплексними членами 14.4.1

$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$	— лишок функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці z_0 14.6.1
$I(x)$	— інтеграл Фур'є 15.1.1
$S(\omega)$	— амплітудний спектр неперіодичної функції 15.1.1
$\varphi(\omega)$	— фазовий спектр неперіодичної функції 15.1.1
$\int_a^b K(x, \omega) f(x) dx$	— інтегральний перетвір функції $f(x)$ 15.1.2
$K(x, \omega)$	— ядро перетворення 15.1.2
\mathcal{F}	— оператор Фур'є 15.1.2
$\mathcal{F}\{f(x)\}(\omega)$	— пряме перетворення Фур'є 15.1.2
$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$	— перетвір Фур'є 15.1.2
$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}(x)$	— обернене перетворення Фур'є 15.1.2
$\mathcal{F}_c\{f(x)\}(\omega)$	— косинус-перетворення Фур'є 15.1.3
$\mathcal{F}_c^{-1}\{F_c(\omega)\}(x)$	— обернене косинус-перетворення Фур'є 15.1.3
$\mathcal{F}_s\{f(x)\}(\omega)$	— синус-перетворення Фур'є 15.1.3
$\mathcal{F}_s^{-1}\{F_s(\omega)\}(x)$	— обернене синус-перетворення Фур'є 15.1.3
\mathcal{L}	— оператор Лапласа 15.2.1
$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = F(p)$,	— пряме перетворення Лапласа 15.2.1
$f(t) \rightarrow F(p)$	
$f(t)$	— функція-оригінал 15.2.1
$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$	— перетвір Лапласа (зображення) 15.2.1
$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}(t) = f(t)$,	— обернене перетворення Лапласа 15.2.1
$F(p) \leftarrow f(t)$	
$\eta(t)$	— функція Гевісайда 15.2.1
$(f_1 * f_2)(t)$	— згортка функцій-оригіналів 15.2.4

РОЗДІЛ 13.

ТЕОРІЯ РЯДІВ

13.1. Числові ряди

13.2. Ряди з невід'ємними членами

13.3. Знакозмінні ряди

13.4. Степеневі ряди

13.5. Тейлорові ряди

13.6. Ряди Фур'є

Поняття ряду є розширенням поняття суми скінченної кількості чисел та функцій.

Розвинутий математичний апарат застосовано до наближених обчислень (степеневі ряди) і аналізу періодичних сигналів (тригонометричні ряди).

Ключові поняття:

- числовий ряд;
- сума ряду;
- збіжність ряду;
- розбіжність ряду;
- степеневий ряд;
- тригонометричний ряд.

Опанувавши цей розділ Ви зможете:

- досліджувати ряди на збіжність;
- знаходити суми рядів;
- розвивати функцію у степеневий ряд (ряд Тейлора);
- розвивати функцію у тригонометричний ряд (ряд Фур'є);
- застосовувати Тейлорові ряди до наближених обчислень;
- застосовувати ряди Фур'є до аналізу періодичних сигналів.

Попередні знання та вміння з розділів:

- Теорія границь;
- Диференціальне числення функцій однієї змінної;
- Інтегральне числення функцій однієї змінної.

Поданий матеріал використовується в розділах:

- Теорія функцій комплексної змінної;
- Інтегральні перетворення.