ЗМІСТ

Вступ

Даний навчальний посібник відповідає програмі курсу вищої математики, що викладається на факультетах, навчально-наукових інститутах та військовому інституті танкових військ Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Він призначений як для аудиторної, так і для самостійної роботи студентів очної, дистанційної та заочної форм навчання.

Посібник входить до складу збірника під назвою «Стислий курс вищої математики» та може бути застосований при викладанні курсу вищої математики на усіх спеціальностях університету. Даний посібник включає наступні розділи: елементи лінійної алгебри; елементи векторного аналізу; аналітична геометрія на площині та у просторі. Кожна глава містить теоретичний матеріал однієї з тем, який складається з означень та їх пояснень, формулювань і доказів теорем, що проілюстровані достатньою кількістю наочних прикладів. До кожної теми додається по тридцять варіантів індивідуальних домашніх завдань та зразок виконання одного варіанта з докладними поясненнями; варіант завдання містить достатню для засвоєння теми кількість задач. Після кожної теми подано перелік теоретичних питань, що виносяться на колоквіум і іспит, набори тестових завдань з теми для проведення модульного контролю і поточної перевірки знань, варіанти контрольних робіт. Підручник також містить задачі домашньої роботи. Наприкінці посібника наведено стислий довідник основних формул, які потрібні для розв'язання задач з поданих тем. На наш погляд, такий довідник дозволить студентам сконцентрувати увагу під час розв'язання задач на головних моментах викладеного матеріалу та допоможе його систематизувати. На таку сконцентровану форму подання навчального матеріалу авторів навів досвід викладання дисципліни за останні десять років в умовах модульної системи оцінювання знань.

Завдяки зазначеному вище структурному наповненню навчальний посібник може бути використаний як викладачами, так і студентами під час занять з будь-якою формою навчання, для підготовки до контрольних робіт, колоквіумів, іспитів, при виконанні обов'язкових та домашніх завдань. Також посібник дає можливість студентам самостійно перевіряти рівень своїх знань з кожної теми.

Навчальний посібник був написаний на основі багаторічного досвіду викладання курсу вищої математики на кафедрі «Прикладна математика» НТУ ХПІ під керівництвом доктора технічних наук, професора Курпи Л. В., якій автори висловлюють велику подяку та пошану за цінні зауваження та поради.

Глава 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1.1. МАТРИЦІ

1.1.1. Основні поняття

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, яка складається з m рядків та n стовпців. Кожен рядок містить n елементів, кожен стовбець – m елементів, усього матриця має $n \times m$ елементів. Позначається як $A_{m\times n}$. Матриця записується у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

або, скорочено, $A = \left(a_{ij}\right)$, де $i = \overline{1,m}$ (тобто $i = 1,2,3,\dots,m$) – номер рядка; $j = \overline{1,n}$ (тобто $j = 1,2,3,\dots,n$) – номер стовпця. *Рядки та стовпці* матриці називаються її ***рядами***. Числа a_{ij}, що складають матрицю, називаються її елементами.

Дві матриці називаються рівними, якщо є рівними всі їхні відповідні елементи, тобто $A = B$, якщо $a_{ij} = b_{ij}$, де $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Матриця, в якій число рядків дорівнює числу стовпців, називається квадратною. Квадратну матрицю розміру $n \times n$ називають матрицею n - го порядку. Елементи, що стоять на діагоналі, яка прямує з верхнього лівого кута до правого нижнього, утворюють головну діагональ матриці. Елементи, що стоять на другій діагоналі, утворюють побічну діагональ.

Квадратна матриця, в якій всі елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***діагональною.***

Діагональна матриця, в якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, називається ***одиничною*** і позначається літерою E.

Приклад 1.1. Одинична матриця 3-го порядку має вигляд

$$E_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається *трикутною*, якщо всі елементи, що розташовані з одного боку головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається ***нульовою***. Вона позначається літерою O та має вигляд

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

У матричному численні матриці O та E відіграють ролі чисел 0 та 1 в арифметиці.

Матриця, що складається з одного стовпця або з одного рядка, називається вектором (або вектор-стовпець, або вектор-рядок відповідно).

Вони мають вигляд $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $B = (b_{11} \quad b_{12} \quad \cdots \quad b_{1n})$.

Матриця розміру 1×1, що складається з одного числа, ототожнюється з цим числом, тобто $(5)_{1\times 1} = 5$.

Матриця, що одержана з даної шляхом заміни кожного її рядка на стовпець з тим же номером, називається матрицею ***транспонованою*** до даної. Позначається як A^T.

Так, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; якщо $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, то $A^T = (4 \quad 1)$.

Транспонована матриця має таку властивість: $(A^T)^T = A$.

1.1.2. Дії з матрицями

Додавання

Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць, що мають однаковий розмір.

Сумою матриць $A_{m\times n} = (a_{ij})$ та $B_{m\times n} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times n} = (c_{ij})$ така, що $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right)$. Записують це так: $C = A + B$.